Rational functions of special type on the two-dimensional complex projective space. (二次元複素射影空間上の特殊型有理函数)

著者	木塚 崇
号	945
発行年	1985
URL	http://hdl.handle.net/10097/24741

氏名・(本籍)	木塚(きづか)　崇(たかし)
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第　945　号
学位授与年月日	昭和60年11月27日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程) 数学専攻
学位論文題目	Rational functions of special type on the two-dimensional complex projective space. (二次元複素射影空間上の特殊型有理函数)
論文審査委員	(主査) 教授 黒田　正　　教授 小田忠雄 教授 堀田良之

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

序

多変数の正則函数の理論には，一変数の正則函数の理論とは本質的に異なる部分と，一変数正則函数の理論の類似が成立する部分とがある。前者の例として，一変数正則函数が値 a をとる点の集合は函数の定義域の離散部分集合に過ぎないが，多変数正則函数の場合には，この集合は複素次元が1以上の解析的構造をもった超曲面であるという事実がある。また，有理函数の世界に目を向ければ，一変数有理函数は一次式の積の比 $C(z-a_1)\cdots(z-a_n)/(z-b_1)\cdots(z-b_m)$ に過ぎないが，二変数多項式には一次式でない既約多項式が豊富にあるので，二変数有理函数は一変数有理函数よりはるかに複雑な構造をもつことになる。本論文の考察の対象となる二次元複素射影空間上の特殊型有理函数は，二変数有理函数のうちで，二次元複素射影空間の代数曲線の補領域の解析的自己同型と深い結びつきをもつ有理函数である。

後者の例として，リーマンの除去可能特異点についての定理がある。しかし，同じような写像の解析的延長についての定理ではあっても，一変数の場合の結果の類似が多変数の場合にも成り立つとは限らない。あるコンパクトなリーマン面Rから有限個の点を取り去ってえられるリーマン面R′の任意の解析的自己同型は，Rの解析的自己同型に延長される。しかしながら，Xをコンパクトな複素二次元解析的多様体，CをX上の解析的曲線（複素純一次元解析的集合）とすると，Cの補領域X＼Cの解析的自己同型は，一般にはXの双有理型変換にさえ延長されないのである。酒井（1976）は，X＼Cの対数的小平次元が2ならば，X＼Cの解析的自己同型はXの双有理型変換に延長されることを示した。ついで，西野・鈴木（1978）は，この現象の本質は，「R′をコンパクトなリーマン面Rの部分領域とするとき，R′の普遍被覆面が単位円板と等角同値ならば，穴あき単位円板 $\triangle^* = \{0 < |Z| < 1\}$ からR′への正則写像は，単位円板 $\triangle = \{|Z| < 1\}$ からRへの正則写像に延長される」という大津賀（1951）の定理にあることを示した。R′自身が単位円板と等角同値の場合が，リーマンの除去可能特異点についての定理である。大津賀の延長定理が成立しないようなR′は，リーマン球P，コンパクトなトーラス，ガウス平面C，又は穴あきガウス平面 C^* に等角同値でなければならない。

大津賀の定理は一変数の正則函数の集積値集合の理論の応用として得られたものであるが，西野・鈴木は，$\triangle$ からの正則写像の集積値集合の理論を像空間が複素二次元の解析的多様体Xである場合に拡張した。X上の解析的曲線Cは結節点以外に特異点をもたないとし，次の意味で極小とする。すなわち，Cの既約成分のうち（コンパクトな）第一種例外曲線であるものは三個以上のCの特異点を通っているものとする。$\triangle^*$ からX＼Cへの正則写像 f が与えられたとき，$\triangle^*_\rho = \{0 < |Z| < \rho\}$ に対して f の原点での集積値集合 $f(0) := \bigcap_{\rho > 0} \overline{f(\triangle^*_\rho)}$ がCの部分集合となる場合を西野・鈴木は詳しく調べて，$f(0)$を決定することに成功し，その理論の応用として前述の酒井の結果を証明している。

第一部　特殊型有理函数と解析的自己同型

第一章　複素二次元ユークリッド空間の解析的自己同型と代数的自己同型

複素二次元の代数多様体X上の定数でない有理函数fの値Cの定数曲線$\{p\epsilon X\setminus I_f ; f(p) = c\}$の既約成分を$f$の（値cの）素曲線とよぶ。$I_f$は，$f$の不確定点全体の集合を表わしている。$f$の非特異な素曲線Sが$C^*$と解析同値であるとき，Sは$C^*$型であるといい，$f$の有限個を例外とするすべての素曲線が$C^*$型であるとき，$f$は$C^*$型であるという。素曲線や有理函数がC型，或いはP型であるという言葉も同様に定義する。fがC型であるか，又は，C^*型であるときfは特殊型であるということにすると，次の定理が得られる。

定理　C^2のある代数曲線cを代数曲線に写像するようなC^2の解析的超越自己同型が存在するための必要にしてかつ十分な条件は，C^2上の特殊型多項式函数Pで，Pの$C^2\setminus c$への制限も特殊型であるものが存在することである。

この定理は，西野・鈴木の理論の応用として得られたものであるが，彼らの定理では，cは結節点以外に特異点をもたず極小でなければならなかったのに対して，上の定理では，cの特異性などについて何らの制限も付されていないことが肝要である。第一章第二節の命題は，この定理の原型であって，西野・鈴木の理論の先駆けをなしたものといえる。

第二章　二次元複素射影空間上の代数曲線の補領域の解析的自己同型

さらに次の定理が得られる。

定理　C^2上の代数曲線cの補領域$C^2\setminus c$が解析的超越自己同型をもつための必要にしてかつ十分な条件は，C^2上の特殊型有理函数fで，fの$C^2\setminus c$への制限も特殊型であるものが存在することである。

既にユング及び柏原紘子によってC^2上の特殊型有理函数が決定されているので，これらの定理にいう代数曲線を具体的に決定することができる。そこで少し一般化して，二次元複素射影空間P^2上で考えることにすれば，次の定理が得られる。

定理　P^2上の代数曲線cの補領域$P^2\setminus c$が解析的超越自己同型をもつならば，P^2上の特殊型有理函数fで，その$P^2\setminus c$への制限$f\mid P^2\setminus c$も特殊型であるものが存在するか，又は，cは非特異楕円曲線である。

さて，P^2上の特殊型有理函数fが一次曲線である素曲線Sをもてば，Sの閉包$\bar{S}$をP^2の無限遠直線と見做して，$f\mid P^2\setminus\bar{S}$を$C^2$上の特殊型有理函数と考えることができる。このような函数の族をF_Iとする。先にも述べたように，F_Iに属する函数は，ユングと柏原によって既に決定されている。しかし，P^2上にはF_Iに属さないような特殊型有理函数が存在する。このような函数の族をF_{II}をする。F_{II}に属する函数は，F_Iに属する函数に比べて，はるかに複雑な構造を持っている。最近，柏原紘子によってF_{II}に属するC型有理函数が決定された。従って，残された問題は，F_{II}に属するC^*型有理函数を決定するという問題であり，その解決が第二部で論ぜられる。

第二部　二次元複素射影空間上の C^* 型有理函数

以下では第二部の第一章から第三章までの内容をまとめて述べる。 f を P^2 上の特殊型有理函数，f を P^2 上の定数でない有理函数，Ξ を P^2 の解析的自己同型とすると，$\varphi \circ f \circ \Xi$ も P^2 上の特殊型有理函数となる。よって，特殊型有理函数の或る意味の標準形を求めることが問題であることがわかる。有理函数 f の定数曲線が有限個を例外として既約なとき，f を原始的であるという。P^2 上の有理函数 f は，P^2 上の原始的な有理函数 f_0 と P^2 上の有理函数 φ を用いて $f = \varphi_0 f_0$ と 表わすことが出来て，しかもこの分解は次の意味で一意的である：f_1 と λ をもう一組の P^2 上の原始的有理函数と P^2 上の有理函数で，$f = \lambda_0 f_1$ をみたすものとすれば，P の解析的自己同型 T が存在して，$f_0 = T \circ f_1$，$\lambda = \varphi \circ T$ となる。したがって，P^2 の原始的な特殊型有理函数を P^2 の解析的自己同型を用いてある意味で正規化し，P^2 の適当な同次座標を用いて表現することによって標準形を得ることが出来れば，特殊型有理函数が決定できたことになる。

有理函数 f の値 c の素曲線 S 上で有理函数 $f - c$ が位数 μ の零をもつとき，S は位数 μ の素曲線であるという。 P^2 上の代数曲線 c の補領域 $V = P^2 \setminus c$ 上の有理函数 g は，以下の三条件をみたすとき，固有 C^* 型であるといわれる。(i) g は V 上に不確定点をもたない。(ii) g は値 $0, \infty$ をとらず正則写像 $g: V \to C^*$ は全射である。(iii) g の各定数曲線は既約で，C^* 型で位数 1 である。このとき，次の定理が得られる。

定理　$V = P^2 \setminus c$ 上に固有 C^* 型の有理函数が存在したとすれば，V 上で値 0，∞ をとらない任意の定数でない原始的有理函数は，V 上で固有 C^* 型である。

この定理によっても見られるように，P^2 上の特殊型有理函数は互いに密接に連関している。f に属する特殊型有理函数の場合，この連関の要の位置にあるのが以下に述べる族（D_0）に属する函数である。P^2 上の原始的有理函数 f が族（D_0）に属するとは，(i) f の不確定点は一点だけであり，(ii) 値 0 の定数曲線は C 型で位数 1 の二つの素曲線から成り，この二つは一点で交叉していて，(iii) 値 ∞ の定数曲線は既約で C 型，(IV) 値 1 の定数曲線は既約で C^* 型で位数が 2 以上，かつ (V) 他の定数曲線は既約で C^* 型であるという五条件を f がみたすことを意味する。

以下では，正則写像 $\sigma: M \to P^2$ を，有理函数 f の不確定点の σ プロセスの有限列による解消とする。f が族（D_0）に属する場合，$\Sigma(f) = \sigma^{-1}(I_f)$ が（可約）第一種例外曲線であり $\sigma^* f$ が M 上の P 型有理函数であるという条件を用いて，$\Sigma(f)$ の M の中への（位相的な）入り具合とでもいうべきものを容易に決定することができる。さらに，ネーターの補題を用いれば，族（D_0）に属する函数の間に非常に密接な連関があることが判り，これらの函数は，ある漸化式によって具体的に構成できることが証明される。一方，φ を P^2 上の C 型の有理函数とすると，ある原始的有理函数 φ_0 の $V = P^2 \setminus (c_1 \cup c_2 \cup c_3)$ への制限が固有 C^* 型であるような φ の三つの素曲線 c_1，c_2，c_3 があるから，$t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2}, t_3^{\alpha_3}$ をそれぞれ $\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$，$\bar{c}_3$ を定義するような同次多項式とし $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(\neq (0, 0, 0))$ を $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \deg t_j = 0$ となるような整数の組とすれば，上の定理によって P^2 上の有理函数 $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3}$ は特殊型有理函数であることがわかる。このようにして，F_n に属する C 型の函数を族（D_0）に属する函数に結びつけること

によって具体的に決定したものが，次の定理である。

定理　P^2上の有理函数φが，F_{11} に属するC 型有理函数であるための必要十分条件は，$\varphi = \lambda \circ \varphi_0$と表わされることである。ここで$\lambda$は，P上の定数でない有理函数で，$\varphi_0 = R_{n,k}{}^p \{\psi_{n,k} - \psi(R_{n,k})\}^q$，$\Psi$は一変数 zのある多項式Pと負でない整数$\ell$に対して，$\psi(z) = P(z)/z^{\ell}$ と表わされる函数，そして，$R_{n,k}$，$\varphi_{n,k}$は，族(D_0)に属する有理函数を構成するための漸化式を用いて構成されるP^2上の有理函数である。

ところで，この定理の証明のためには，捩れC^*型と呼ばれるP^2上の有理函数が存在する可能性について検討しなければならない。$\sigma^* f$の$\Sigma(f)$の既約成分 cへの制限が定数でないとき，cを$\sigma^* f$の基断面と呼び，C^*型の有理函数fで，$\sigma^* f$が基断面を一つだけもつものを捩れC^*型というのであるが，P^2上にそのような函数fが存在するとすれば，$\Sigma(f)$は無限個の有理曲線の和でなければならないことが示され，σがσプロセスの有限列であることに矛盾する。
かくして，上記定理は，（柏原の定理と併せて）F_{11} に属する有理函数を完全に決定していることになる。

論文審査の結果の要旨

二複素変数の解析函数の理論において，複素二次元ユークリッド空間C^2あるいは複素二次元射影空間P^2の解析的自己同型写像の研究が果す役割りの重要性は古来よく知られている。

本論文においては，その素面が有限個を除いてすべて複素平面C又は穴あき複素平面C^*に正則同値となるような，二複素変数の解析函数を特殊型ということにし，特殊型有理函数の族が，C^2又はP^2の解析的自己同型の研究に重要な手段を提供することを示すと共に，P^2 での特殊型有理函数のすべてを決定する問題を論じている。

まず，C^2の解析的自己同型写像のうちで超越的でないもの性質を調べる。その結果は西野・鈴木の研究の端緒となったが，更に西野・鈴木がえた結果を応用することによって，C^2の代数曲線をC^2の代数曲線に写像するC^2の解析的超越自己同型写像を調べ，ついで代数曲線 c に対し，C^2— c 又はP^2— c が解析的超越自己同型写像をもつための必要条件あるいは十分条件を，C^2又はP^2でのある種の特殊型有理函数の存在によって記述する。これらの結果は，特殊型有理函数の研究がC^2又はP^2の解析的自己同型写像の研究において重要な役割りを果すことを示すものである。

かくして，特殊型有理函数を決定することが問題となるが，C^2での特殊型有理函数についてはユングおよび柏原紘子によって完全な解決がなされており，又これらの人達はP^2の場合にもある程度の結果をえている。しかしそれらの研究が完全な形に達しえなかったのは有理函数の不確定点の解消の際に生ずる例外曲線が極めて複雑な様相を呈するからであるが，本論文では綿密な計算と行き届いた整理によって，P^2での特殊型有理函数を完全に決定することに成功した。

これらの諸結果は，著者のすぐれた研究能力を示すと共に多変数解析函数の理論に重要な寄与をしたものであって，理学博士の学位論文として合格である。